

武器装备

# 基于多元随机效应 Wiener 过程的 某弹用弹簧可靠性评估

翟科达<sup>1</sup>, 顾晓辉<sup>1</sup>, 孙丽<sup>2</sup>, 潘守华<sup>3</sup>

(1.南京理工大学 机械工程学院, 南京 210094; 2.江苏科技大学 机械工程学院, 江苏 镇江 212100;  
3.北方特种能源集团西安庆华公司, 西安 710025)

**摘要:** **目的** 解决某弹用弹簧可靠性评估中存在的 uncertainty 问题。**方法** 对某弹用弹簧进行加速退化试验, 试验过程中发现其具有多个性能退化参数, 并且其退化过程具有非线性、随机性及样本差异性的特征。为了对其退化过程进行数学表征, 提出一种基于多元随机效应 Wiener 过程的退化模型。采用基于时间尺度变换的非线性 Wiener 过程, 描述弹簧退化过程中的非线性与随机性。基于随机效应模型, 对样本的差异性进行表征, 利用 Copula 函数描述多元性能参数之间的相互作用关系。最后推导弹簧失效寿命的概率密度函数、可靠度函数。**结果** 在贮存条件为 25 °C、可靠度为 0.9 时, 基于构建的多元随机效应 Wiener 过程模型, 当考虑性能间的相关性时, 得到某弹用弹簧的贮存寿命为 12 a; 不考虑性能间的相关性时, 得到其贮存寿命为 11.5 a。**结论** 构建的多元随机退化模型为该弹药健康状态管理提供了相应的理论依据。

**关键词:** 随机效应 Wiener 过程; 时间尺度变换; 非线性; 样本差异性; 多元性能; Copula 函数

**中图分类号:** TJ410.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-9242(2022)04-0001-07

**DOI:** 10.7643/issn.1672-9242.2022.04.001

## Reliability Assessment of the Ammunition Spring Based on Multiple Random Effects Wiener Process

ZHAI Ke-da<sup>1</sup>, GU Xiao-hui<sup>1</sup>, SUN Li<sup>2</sup>, PAN Shou-hua<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. School of Mechanical Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Jiangsu Zhenjiang 212100, China; 3. Xi'an Qinghua Co. Ltd., North Special Energy Group Co. Ltd., Xi'an 710025, China)

**ABSTRACT:** In order to solve the uncertainty in reliability evaluation of the ammunition spring, the accelerated degradation experiment is carried out on it. During the experiment, it is found that it has multiple performance degradation parameters, and

收稿日期: 2021-07-02; 修订日期: 2021-08-23

Received: 2021-07-02; Revised: 2021-08-23

基金项目: 国防科技预先研究项目 (004040204)

Fund: Defense Science and Technology Advance Research Project (004040204)

作者简介: 翟科达 (1997—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为故障诊断、预测与健康管理。

Biography: ZHAI Ke-da (1997—), Male, Postgraduate, Research focus: fault diagnosis, prediction and health management.

通讯作者: 顾晓辉 (1964—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为弹药智能化技术、机电可靠性技术。

Corresponding author: GU Xiao-hui (1964—), Male, Doctor, Professor, Research focus: intelligent technology of ammunition, and electro-mechanical reliability technology.

引文格式: 翟科达, 顾晓辉, 孙丽, 等. 基于多元随机效应 Wiener 过程的某弹用弹簧可靠性评估[J]. 装备环境工程, 2022, 19(4): 001-007.  
ZHAI Ke-da, GU Xiao-hui, SUN Li, et al. Reliability Assessment of the Ammunition Spring Based on Multiple Random Effects Wiener Process [J]. Equipment Environmental Engineering, 2022, 19(4): 001-007.

the degradation process has the characteristics of nonlinearity, randomness and sample difference. In order to characterize the degradation process mathematically, a degradation model based on multivariate random effects Wiener process is proposed. Firstly, the nonlinear Wiener process based on time scale transformation is used to describe the nonlinear and randomness of the spring degradation process, and the sample difference is characterized based on the random effect model. Then, Copula function is used to describe the interaction between multiple performance parameters. Finally, the probability density function and reliability function of the spring failure life are derived. When the storage condition is 25 °C and the reliability is 0.9, based on the multivariate random effect Wiener process model constructed in this paper, the storage life of a certain ammunition spring is 12 years when the correlation between performance is considered, and 11.5 years when the correlation between performance is not considered. The multivariate random degradation model constructed provides a theoretical basis for the health state management of the ammunition.

**KEY WORDS:** random effect Wiener process; time scale transformation; nonlinear; sample difference; multivariate performance; Copula function

某新概念弹药, 主要用于提高军舰的远海作战能力, 是目前海军装备研究的热点。研究表明, 该弹用弹簧在贮存期的主要失效形式为应力松弛变形, 对该弹药系统内部精密仪器的测试精度及功能可靠性产生了极大影响。因此, 对其应力松弛变形失效规律和寿命预测的研究具有明确的工程背景需求和显著的理论意义。

通过对某弹用弹簧的失效机理进行研究, 发现产品失效主要由弹性应变与塑性应变共同作用导致, 故选取应力松弛率和压缩永久变形率作为表征退化状态的敏感特征参数, 温度应力作为加速应力, 开展多元参数性能加速退化试验, 以评估某弹用弹簧的可靠性。针对某弹用弹簧在退化过程中表现出的非线性、随机性及样本间的差异性特征, 基于时间尺度变换的非线性 Wiener 过程, 将 Wiener 过程模型参数进行随机化处理, 提出了基于随机效应的 Wiener 过程模型。

孙丽<sup>[1]</sup>利用产品失效机理一致性原则理论推导证明了扩散系数的平方与漂移系数成一定比例关系, 即漂移系数、扩散系数均服从某一随机分布, 由此产品寿命分布对应的概率密度函数 (Probability Density Function, PDF) 的解析形式将难以求解。考虑到漂移系数与扩散系数间的比例关系是统计意义下获得的, 因此可参考文献[2-5], 假定不同样本间漂移系数不同, 扩散系数相同 (即将漂移系数进行随机化处理, 扩散系数为固定值), 此假定确保了在均值意义下仍能满足产品失效机理一致性原则, 并简化了模型。针对某弹用弹簧同时存在多元性能退化问题, 现阶段常用的解决手段有降维处理<sup>[6-7]</sup>、多元正态联合分布函数的应用<sup>[8-9]</sup>、Copula 函数的应用<sup>[10-12]</sup>等。综上所述, 文中首先构建基于随机效应的非线性 Wiener 过程模型, 然后利用 Copula 函数建立多元性能退化模型, 最后采集某弹用弹簧性能退化数据, 对其退化特性进行研究。

## 1 试验方案设计与试验结果

### 1.1 试验对象

试验对象为某弹用弹簧。为模拟其真实安装状态, 设计了配套模拟夹具 (夹具内部高度为试样高度的 34%), 夹具及样本如图 1 所示。

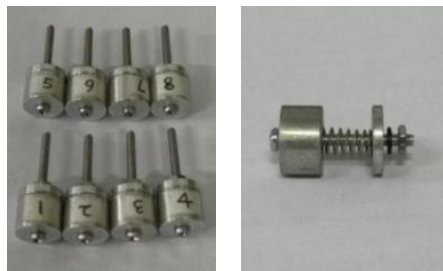


图 1 某弹用弹簧及其夹具  
Fig.1 Spring and clamp for the ammunition

### 1.2 试验设备

试验设备为: 恒温数显干燥箱 (XMTD-9000) 1 台, 数显式推拉力计 (HP-100) 1 台, 光学尺寸测量系统 1 套。

### 1.3 试验条件

加速试验温度为 130、140、150 °C。每组加速应力下放置 8 个样品, 各组加速应力对应的样品检测次数均为 15 次, 对应的试验截止时间分别为  $t_1=814$  h,  $t_2=714$  h,  $t_3=234$  h。

### 1.4 性能退化参数选择及失效阈值确定

研究表明, 某弹用弹簧在贮存过程中发生的失效形式主要为应力松弛变形失效, 且主要是由弹性应变与塑性应变共同作用导致的<sup>[13]</sup>。因此, 选取应力松弛率  $\delta$  和压缩永久变形率  $\varepsilon$  作为产品性能退化参数。根据产品实际工作情况要求, 设定应力松弛率  $\delta$  的失效

阈值为  $D_1=6\%$ , 压缩永久变形率  $\varepsilon$  的失效阈值为  $D_2=5\%$ 。

### 1.5 试验步骤

从同批次产品中随机抽取 24 个试验样品, 平均分成 3 组, 将其安装于模拟夹具中, 分别置于 130、140、150 °C 试验箱中, 按指定时间将试验样品从模拟夹具中取出, 并于室温下恢复弹性变形 6.5 h, 测量试样的弹性压力及其轴向长度。重复上述步骤至试验样品均完成检测后, 停止试验。

### 1.6 试验数据处理

应力松弛率  $\delta$  的计算公式为:

$$\delta = \frac{P_0 - P_t}{P_0} \times 100\% \quad (1)$$

式中:  $P_t$  为试样恢复后的弹性压力, N;  $P_0$  为试样的初始弹性压力, N。

压缩永久变形率  $\varepsilon$  的计算公式为:

$$\varepsilon = \frac{L_0 - L_t}{L_0} \times 100\% \quad (2)$$

式中:  $L_t$  为试样恢复后的轴向长度, mm;  $L_0$  为试样的初始轴向长度, mm。

试验采集到的性能退化量如图 2 所示 (140 °C 的试验中, 样本 4 试验数据突发异常, 将其剔除)。

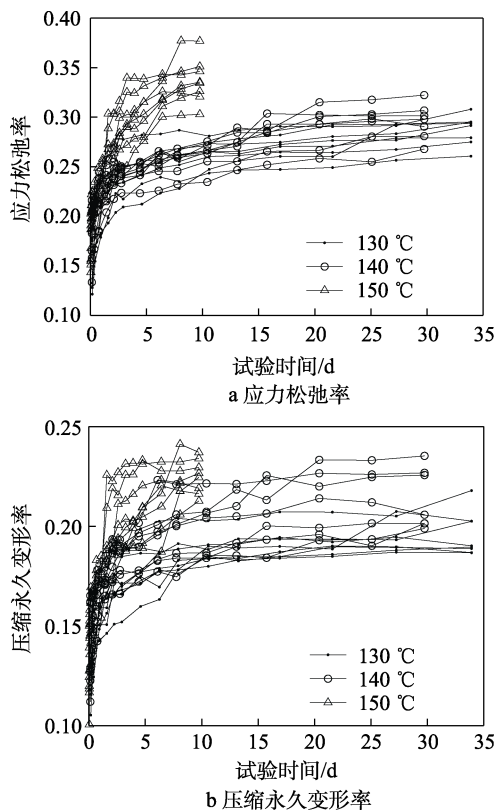


图 2 某弹用弹簧退化数据

Fig.2 Degradation data of the ammunition spring: a) stress relaxation rate; b) compression set rate

## 2 多元随机效应 Wiener 过程建模

### 2.1 考虑随机效应的非线性 Wiener 过程

基于时间尺度变换的非线性 Wiener 过程可以表示为<sup>[1]</sup>:

$$X_k(t) = a_k \cdot A_k(t, \alpha_k) + \sigma_{bk} \cdot B_k(A_k(t, \alpha_k)) \quad (3)$$

式中:  $a_k$  表示漂移系数;  $\sigma_{bk}$  表示扩散系数;  $B_k(\cdot)$  表示标准 Brownian 运动;  $A_k(t)$  表示时间尺度变换函数 (结合某弹用弹簧的退化特性, 选定  $A_k(t, \alpha_k) = t^{\alpha_k}$ );  $\alpha_k$  表示时间指数常数;  $X_k(t)$  表示第  $k$  个性能指标在时刻  $t$  的退化量,  $k=1, 2$ 。

产品寿命  $Y_k$  定义为产品性能退化量  $X_k(t)$  首次达到设定失效阈值  $D_k$  的时间, 即:

$$Y_k = \inf \{ t \mid X_k(t) \geq D_k, t \geq 0 \} \quad (4)$$

式 (4) 中首达时间  $Y_k$  满足逆高斯分布<sup>[14]</sup>,  $Y_k$  的分布函数 (Cumulative Density Function, CDF)、概率密度函数 (Probability Density Function, PDF) 为:

$$F_k(t) = \Phi \left[ \frac{a_k \cdot A_k(t, \alpha_k) - D_k}{\sigma_{bk} \cdot \sqrt{A_k(t, \alpha_k)}} \right] + \quad (5)$$

$$\exp \left( \frac{2a_k \cdot D_k}{\sigma_{bk}^2} \right) \Phi \left\{ \frac{-[a_k \cdot A_k(t, \alpha_k) + D_k]}{\sigma_{bk} \cdot \sqrt{A_k(t, \alpha_k)}} \right\}$$

$$f_k(t) = \frac{D_k}{\sqrt{2\pi\sigma_{bk}^2 \cdot [A_k(t, \alpha_k)]^3}} \cdot \quad (6)$$

$$\exp \left\{ \frac{-[a_k \cdot A_k(t, \alpha_k) - D_k]^2}{2\sigma_{bk}^2 \cdot A_k(t, \alpha_k)} \right\} \frac{dA_k(t, \alpha_k)}{dt}$$

基于 Wiener 过程性质<sup>[15]</sup>, 可以得到:

$$\Delta X_{ik}(t_j) \sim N[a_k \Delta A_k(t_j, \alpha_k), \sigma_{bk}^2 \Delta A_k(t_j, \alpha_k)],$$

$$\Delta A_k(t_j, \alpha_k) = (t_j)^{\alpha_k} - (t_{j-1})^{\alpha_k} \quad (7)$$

式中:  $i$  为加速应力  $S_p$  下的样本数,  $p=1, 2, \dots, P$ ,  $i=1, 2, \dots, m_p$ ;  $t_j$  为检测时刻,  $j=1, 2, \dots, n_p$ 。

将式 (3) 中漂移系数  $a_k$  进行随机化处理, 即得基于随机效应的非线性 Wiener 过程模型:

$$\begin{cases} X_k(t) = a_k \cdot A_k(t, \alpha_k) + \sigma_{bk} \cdot B(A_k(t, \alpha_k)) \\ a_k \sim N(\mu_{ak}, \sigma_{ak}^2) \end{cases} \quad (8)$$

综上所述, 基于全概率公式, 并结合式 (7) 可得加速应力  $S_p$  下的退化增量  $\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p)$  对应的概率密度函数:

$$g_k(\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)] \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)}} \cdot \exp \left[ -\frac{[\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p) - \mu_{ak}(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)]^2}{2[\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)] \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)} \right] \quad (9)$$

产品对应的可靠度函数为:

$$R_k(t/S_p) = 1 - \Phi \left[ \frac{\mu_{ak}(S_p) \cdot A_k(t, \alpha_k) - D_k}{\sqrt{\sigma_{bk}^2(S_p) \cdot A_k(t, \alpha_k) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot A_k^2(t, \alpha_k)}} \right] - \exp \left[ \frac{2\mu_{ak}(S_p) \cdot D_k}{\sigma_{bk}^2(S_p)} + \frac{2\sigma_{ak}^2(S_p) \cdot D_k^2}{\sigma_{bk}^4(S_p)} \right] \cdot \Phi \left\{ - \frac{2\sigma_{ak}^2(S_p) \cdot D_k \cdot A_k(t, \alpha_k) + \sigma_{bk}^2(S_p) \cdot [D_k + \mu_{ak}(S_p) \cdot A_k(t, \alpha_k)]}{\sigma_{bk}^2(S_p) \cdot \sqrt{\sigma_{bk}^2(S_p) \cdot A_k(t, \alpha_k) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot A_k^2(t, \alpha_k)}} \right\} \quad (10)$$

## 2.2 多元参数性能退化产品可靠性建模

目前多元参数性能退化产品可靠性建模方法主要为以下 3 类: 降维处理, 即利用构建状态空间模型等手段达到简化退化量的目的; 利用多元联合正态分布函数构建多元参数性能退化产品可靠性模型; 应用 Copula 函数。降维处理在多元 (三元及以上) 性能参数建模建模时更为适宜, 低维状态下则应用较少。多元联合正态分布函数边缘分布只能为正态分布, 具有一定局限性。Copula 函数的特性: 实用性强, 利用 Copula 函数作为相关性度量工具, 可以完整地描述变量间的相关性<sup>[16]</sup>; 灵活性强, 随机变量间的 Copula 相关性结构及其边缘分布可被分开研究, 并且选择边缘分布不受限<sup>[17-20]</sup>; 真实性强, Copula 函数构造的多元分布函数更精确。因此, 选用 Copula 函数构建多元参数性能退化产品可靠性模型。

Copula 函数建模的核心理念可以利用 Sklar 定理<sup>[21]</sup>实现。设  $L$  为  $K$  维分布函数,  $H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_K(x_K)$  为其边缘分布函数, 则存在对应的 Copula 函数  $C[H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_K(x_K)]$  满足  $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = C[H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_K(x_K)]$ 。

利用 Copula 函数构造的  $K$  维分布函数的 PDF:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_m) = c[H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_K(x_K)] \cdot h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \cdots h_K(x_K) \quad (11)$$

式中:  $c[H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_K(x_K)]$  为 Copula 函数的 PDF;  $h_1(x_1), h_2(x_2), \dots, h_K(x_K)$  为边缘分布的 PDF。

常用二元 Copula 函数主要为 Archimedean 族和 Elliptical 族 2 类<sup>[22]</sup>。Archimedean 族 Copula 函数主要为 Frank、Clayton Copula 函数, Elliptical 族 Copula 函数主要为 Gaussian Copula 函数。

Frank Copula 函数:

$$C(q, w; \varphi) = -\frac{1}{\varphi} \ln \left[ 1 + \frac{(\mathrm{e}^{-\varphi q} - 1)(\mathrm{e}^{-\varphi w} - 1)}{\mathrm{e}^{-\varphi} - 1} \right] \quad (12)$$

式中:  $\varphi \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ , 当  $\varphi > 0$  时,  $q, w$  正相关; 当  $\varphi \rightarrow 0$  时,  $q, w$  独立; 当  $\varphi < 0$  时,  $q, w$  负相关。

Clayton Copula 函数:

$$C(q, w; \varphi) = (q^{-\varphi} + w^{-\varphi} - 1)^{-\frac{1}{\varphi}} \quad (13)$$

式中:  $\varphi \in (0, +\infty)$ , 当  $\varphi \rightarrow 0$  时,  $q, w \rightarrow$  独立; 当  $\varphi \rightarrow +\infty$  时,  $q, w$  完全相关。

Gaussian Copula 函数:

$$C(q, w, \varphi) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(q)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(w)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varphi^2}} \cdot \exp \left[ -\frac{x^2 - 2\varphi xy + y^2}{2(1-\varphi^2)} \right] dx dy \quad (14)$$

式中:  $\varphi \in (-1, 1)$ , 当  $\varphi = \pm 1$  时,  $q, w$  完全相关。

基于 AIC 信息准则<sup>[12]</sup>, 选取最优的 Copula 函数, AIC 值 ( $f_{AIC}$ ) 的计算见式 (15)。

$$f_{AIC} = -2f_{\text{Log-LF}} + 2k \quad (15)$$

式中:  $f_{\text{Log-LF}}$  为模型的对数似然函数值;  $k$  为模型中未知参数个数。AIC 值越小, 表示所选用 Copula 函数模型的拟合效果越好。

若多元参数性能间相互独立, 则产品的可靠度可以表示为:

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \quad (16)$$

若多元参数性能间存在相关性, 则产品的可靠度可以表示为:

$$R(t) = C[R_1(t), R_2(t); \varphi] \quad (17)$$

式中:  $R_1(t)$  和  $R_2(t)$  分别为对应性能退化量的可靠度;  $\varphi$  为 Copula 函数参数估计值。

## 2.3 回归分析

加速应力为温度应力, 因此可选用阿伦尼乌斯 (Arrhenius) 加速模型构建回归方程:

$$\begin{cases} \ln[\mu_{ak}(S_p)] = \rho_{\mu_{ak}} + \frac{\nu_{\mu_{ak}}}{S_p} \\ \ln[\sigma_{ak}(S_p)] = \rho_{\sigma_{ak}} + \frac{\nu_{\sigma_{ak}}}{S_p} \\ \ln[\sigma_{bk}(S_p)] = \rho_{\sigma_{bk}} + \frac{\nu_{\sigma_{bk}}}{S_p} \\ \ln[\varphi(S_p)] = \rho_{\varphi} + \frac{\nu_{\varphi}}{S_p} \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $\rho_{\mu_{ak}}, \nu_{\mu_{ak}}, \rho_{\sigma_{ak}}, \nu_{\sigma_{ak}}, \rho_{\sigma_{bk}}, \nu_{\sigma_{bk}}, \rho_{\varphi}, \nu_{\varphi}$  均为固定常数。

## 3 参数估计

上述构建的模型中, 待求解的未知参数为:

$\Theta = (\rho_{\mu_{ak}}, \nu_{\mu_{ak}}, \rho_{\sigma_{ak}}, \nu_{\sigma_{ak}}, \rho_{\sigma_{bk}}, \nu_{\sigma_{bk}}, \rho_{\varphi}, \nu_{\varphi}, \alpha_k)$ 。目前常用的多元参数性能退化产品可靠性模型参数估计方法<sup>[23]</sup>为两阶段极大似然估计法 (Two Step-Maximum Likelihood, TSML) 和 Markov Chain Monte Carlo 算法。由于 TSML 法适用性强、计算简便, 故采用 TSML 法对模型未知参数进行求解。考虑到未知参数过多, 采用回归分析与 TSML 方法相结合的方法<sup>[24]</sup>, 求解模型未知参数。

Step1: TSML 方法。确定加速应力  $S_p$ , 建立加速应力  $S_p$  下模型的对数似然函数  $\ln L(\Theta)$  (由 Copula 相关对数似然函数  $\ln L_{CO}(\Theta)$  和边缘分布对数似然函数

$$\ln L_{BK}(\Theta) = -\frac{m_p \cdot n_p}{2} \ln 2\pi - \frac{m_p}{2} \sum_{j=1}^{n_p} \ln \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j=1}^{n_p} \ln [\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)] - \sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{[\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p) - \mu_{ak}(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)]^2}{2[\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)] \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)} \quad (20)$$

分别对式 (20) 中  $\sigma_{ak}^2(S_p)$ 、 $\mu_{ak}(S_p)$  进行一阶求偏导, 可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L_{BK}(\Theta)}{\partial \mu_{ak}(S_p)} = 0 \\ \frac{\partial \ln L_{BK}(\Theta)}{\partial \sigma_{ak}^2(S_p)} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

显然, 由式 (21) 难以求得  $\sigma_{ak}(S_p)$  的显式表达式。当给定参数  $\sigma_{ak}(S_p)$ 、 $\sigma_{bk}(S_p)$ 、 $\alpha_k(S_p)$  时, 可得关于  $\mu_{ak}(S_p)$  的极大似然估计:

$$\hat{\mu}_{ak}(S_p) = \frac{\sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p)}{\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)}}{\sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)}{\sigma_{bk}^2(S_p) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)}} \quad (22)$$

将  $\hat{\mu}_{ak}(S_p)$  代入式 (20), 即得关于  $\sigma_{ak}(S_p)$ 、 $\sigma_{bk}(S_p)$ 、 $\alpha_k(S_p)$  的剖面对数似然函数。

首先, 求解  $\hat{\sigma}_{ak}(S_p)$ 、 $\hat{\sigma}_{bk}(S_p)$ 、 $\hat{\alpha}_k(S_p)$ 。选取  $\sigma_{ak}(S_p)$ 、 $\sigma_{bk}(S_p)$ 、 $\alpha_k(S_p)$  作为决策变量, 采用 Matlab 中的 fminsearch 函数进行多维遍历搜寻<sup>[14]</sup>, 遍历搜寻

$\ln L_B(\Theta)$  两部分构成):  $\ln L(\Theta) = \ln L_{CO}(\Theta) + \ln L_B(\Theta)$ 。

Copula 相关:

$$\ln L_{CO}(\Theta) = \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{m_p} \sum_{j=1}^{n_p} \ln c\{\Phi[U_{i,j}^{(1)}], \Phi[U_{i,j}^{(2)}]; \varphi\} \quad (19)$$

式中:

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{\Delta X_{ik}(t_{jp}/S_p) - \mu_{ak}(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k)}{\sqrt{\sigma_{bk}^2(S_p) \cdot \Delta A_k(t_{jp}, \alpha_k) + \sigma_{ak}^2(S_p) \cdot \Delta A_k^2(t_{jp}, \alpha_k)}};$$

$c(\cdot)$  为 Copula 函数的 PDF;  $\varphi$  为待求 Copula 函数参数值。

边缘分布:

对应的返回值即为  $\hat{\sigma}_{ak}(S_p)$ 、 $\hat{\sigma}_{bk}(S_p)$ 、 $\hat{\alpha}_k(S_p)$ 。

其次, 求解  $\hat{\alpha}_k$ 、 $\hat{\mu}_{ak}(S_p)$ 。将各加速应力下的  $\hat{\alpha}_k(S_p)$  取平均值, 作为  $\hat{\alpha}_k$ <sup>[25]</sup>。再将求得的  $\hat{\sigma}_{ak}(S_p)$ 、 $\hat{\sigma}_{bk}(S_p)$ 、 $\hat{\alpha}_k$  代入式 (22) 即可求出  $\hat{\mu}_{ak}(S_p)$ 。

最后, 求解式 (19) 中的未知参数  $\hat{\varphi}$ 。首先选取最优 Copula 函数, 进而对式 (19) 进行极大似然估计, 求得  $\hat{\varphi}$ 。综上, 求得各加速应力  $S_p$  下的参数估计值:  $\Omega(S) = (\hat{\mu}_{ak}(S_p), \hat{\sigma}_{ak}(S_p), \hat{\sigma}_{bk}(S_p), \hat{\varphi}, \hat{\alpha}_k)$ 。

Step2: 回归分析。收集 Step1 中各加速应力  $S_p$  下的参数估计值  $\Omega(S)$ , 利用式 (18) 进行回归分析, 最后求得所需未知参数:  $\hat{\Theta} = (\hat{\rho}_{\mu_{ak}}, \hat{\nu}_{\mu_{ak}}, \hat{\rho}_{\sigma_{ak}}, \hat{\nu}_{\sigma_{ak}}, \hat{\rho}_{\sigma_{bk}}, \hat{\nu}_{\sigma_{bk}}, \hat{\rho}_{\varphi}, \hat{\nu}_{\varphi}, \hat{\alpha}_k)$ 。

## 4 试验结果分析

利用上述参数估计方法求解各性能指标未知参数估计值, 结果见表 1。结合上述求得的参数估计值, 利用 AIC 信息准则为模型选取最优 Copula 函数, 结果见表 2。

表 1 各性能指标未知参数估计值

Tab.1 Estimated values of unknown parameters of each performance index

| 模型参数                  | $\hat{\rho}_{\mu_a}$ | $\hat{\nu}_{\mu_a}$ | $\hat{\rho}_{\sigma_a}$ | $\hat{\nu}_{\sigma_a}$ | $\hat{\rho}_{\sigma_b}$ | $\hat{\nu}_{\sigma_b}$ | $\hat{\alpha}$ |
|-----------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|----------------|
| 应力松弛率 $\delta$        | 4.516 9              | -2 491.3            | -11.618 8               | 47.965 8               | 5.191 1                 | -3 372.9               | 0.108 5        |
| 压缩永久变形率 $\varepsilon$ | 3.378 9              | -2 151.9            | -10.577 3               | -365.011 2             | 4.474 1                 | -3 188.2               | 0.090 7        |

表 2 多元随机效应 Wiener 过程模型 AIC 值

Tab.2 AIC value of Wiener multivariate random effect process model

| Copula    | Frank    | Gaussian | Clayton  |
|-----------|----------|----------|----------|
| AIC value | -4 764.3 | -2 454.2 | -4 742.3 |

由表2可知, Frank Copula 函数的 AIC 值最小, 多元随机效应 Wiener 过程模型采用 Frank Copula 函数的拟合效果最优。选定 Copula 函数后, 进而求解相应 Copula 函数参数估计值, 结果见表3。

利用式(18)推导正常应力  $S_0$  (25 °C) 下多元随机效应 Wiener 过程模型参数, 结果见表4。采用相应函数, 对某弹用弹簧可靠度进行评估, 其评估结果如图3所示。

表3 Copula 函数参数估计值  
Tab.3 Parameter estimation of Copula function

| Copula  | $\hat{\rho}_\varphi$ | $\hat{\varphi}$ |
|---------|----------------------|-----------------|
| Clayton | 5.322 9              | -1 332.6        |

表4 正常应力  $S_0$  下多元随机效应 Wiener 过程模型参数  
Tab.4 Parameters of with multivariate random effect Wiener process model under normal stress  $S_0$

| 性能退化量         | $\mu_{ak}(S_0)$ | $\sigma_{ak}(S_0)$        | $\sigma_{bk}(S_0)$ | $\varphi$ |
|---------------|-----------------|---------------------------|--------------------|-----------|
| $\delta$      | 0.021 4         | $1.056\ 6 \times 10^{-5}$ | 0.002 2            | 2.342 1   |
| $\varepsilon$ | 0.021 4         | $7.488\ 6 \times 10^{-6}$ | 0.002 0            |           |

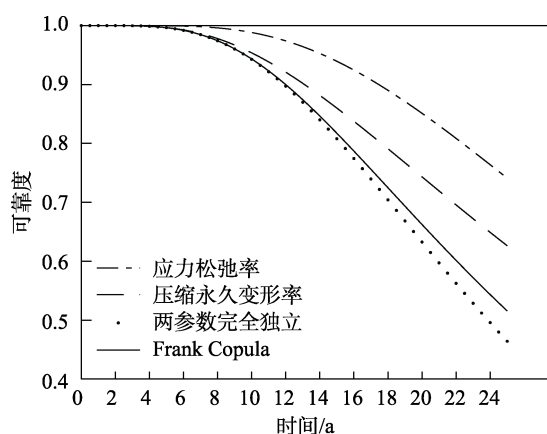


图3 某弹用弹簧可靠度曲线  
Fig.3 Reliability curve of the ammunition spring

对图3中的曲线进行分析, 当贮存条件为25 °C、可靠度为0.9时, 基于应力松弛率退化模型得到某弹用弹簧的贮存寿命为17.5 a, 基于压缩永久变形率退化模型得到其贮存寿命为13 a。基于本文构建的多元随机效应 Wiener 过程模型, 考虑参数的相关性时, 得到某弹用弹簧贮存寿命为12 a; 不考虑参数的相关性时, 得到其贮存寿命为11.5 a。

图3曲线表明, 在同一时间点下, 本文模型对某弹用弹簧可靠度的评估结果低于单参数模型的评估结果, 即基于多元随机效应 Wiener 过程模型的可靠性评估结果更为保守。考虑到某弹用弹簧的失效可能导致严重的后果, 因此为保证某弹用弹簧得到及时有效的维护, 采取保守的可靠度评估结果则更加有效。

## 5 结论

基于多元随机效应 Wiener 过程的某弹用弹簧可靠性评估研究, 可得到如下结论:

1) 利用本文构建的多元随机效应 Wiener 过程模型, 为某弹用弹簧的定期维护提供了一定的理论指导。

2) 文中目前仅考虑产品性能退化量与时间的关联性, 然而并未考虑产品当前的性能退化状态也会影响其后续性能退化过程。因此, 针对时间-状态相关的非线性随机退化系统的可靠性建模问题需要进一步研究。

### 参考文献:

- [1] 孙丽. 基于随机过程的退化失效建模理论与方法研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2019.  
SUN Li. Research on Degradation Failure Modeling Theories Based on Stochastic Process[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2019.
- [2] PENG C Y, TSENG S T. Mis-Specification Analysis of Linear Degradation Models[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2009, 58(3): 444-455.
- [3] TSAI C C, TSENG S T, BALAKRISHNAN N. Mis-Specification Analyses of Gamma and Wiener Degradation Processes[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2011, 141(12): 3725-3735.
- [4] SI Xiao-sheng, WANG Wen-bin, HU Chang-hua, et al. Remaining Useful Life Estimation Based on a Nonlinear Diffusion Degradation Process[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(1): 50-67.
- [5] SI Xiao-sheng, WANG Wen-bin, HU Chang-hua, et al. A Wiener-Process-Based Degradation Model with a Recursive Filter Algorithm for Remaining Useful Life Estimation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 35(1-2): 219-237.
- [6] 王浩伟, 奚文骏, 冯玉光. 基于退化失效与突发失效竞争的导弹剩余寿命预测[J]. 航空学报, 2016, 37(4): 1240-1248.  
WANG Hao-wei, XI Wen-jun, FENG Yu-guang. Remaining Life Prediction Based on Competing Risks of Degradation Failure and Traumatic Failure for Missiles [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(4): 1240-1248.
- [7] 蔡忠义, 项华春, 王攀, 等. 竞争失效下多元退化建模的导弹贮存寿命评估[J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(5): 1183-1188.  
CAI Zhong-yi, XIANG Hua-chun, WANG Pan, et al. Missile Storage Lifetime Assessment of Multivariate Degradation Modeling under Competition Failure[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018, 40(5): 1183-1188.

- [8] 晁代宏, 马静, 陈淑英. 应用多元性能退化量评估光纤陀螺贮存的可可靠性[J]. 光学 精密工程, 2011, 19(1): 35-40.  
CHAO Dai-hong, MA Jing, CHEN Shu-ying. Assessment of Storage Reliability for FOGs by Multivariate Degradation Data[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(1): 35-40.
- [9] OLATUBOSUN S A, ZHANG Zhi-jian. Multivariate Analysis of Critical Parameters Influencing the Reliability of Thermal-Hydraulic Passive Safety System[J]. Nuclear Engineering and Technology, 2019, 51(1): 45-53.
- [10] PAN Zheng-qiang, BALAKRISHNAN N, SUN Quan, et al. Bivariate Degradation Analysis of Products Based on Wiener Processes and Copulas[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2013, 83(7): 1316-1329.
- [11] WANG Xiao-lin, GUO Bo, CHENG Zhi-jun, et al. Residual Life Estimation Based on Bivariate Wiener Degradation Process with Measurement Errors[J]. Journal of Central South University, 2013, 20(7): 1844-1851.
- [12] 胡启国, 高展. 多元参数退化的系统相关竞争失效可靠性评估方法[J]. 西北工业大学学报, 2019, 37(6): 1191-1199.  
HU Qi-guo, GAO Zhan. A Reliability Evaluation Method for System's Dependent Competition Failure and Multi-Parameter Degradation Failure[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2019, 37(6): 1191-1199.
- [13] 张保山, 王永平, 李志勇, 等. 60Si<sub>2</sub>Mn 螺旋弹簧的压缩应力松弛行为与贮存寿命预测[J]. 实验力学, 2011, 26(6): 699-706.  
ZHANG Bao-shan, WANG Yong-ping, LI Zhi-yong, et al. On the Compressive Stress Relaxation Behavior and Storage Life Prediction of 60Si<sub>2</sub>Mn Helical Springs[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2011, 26(6): 699-706.
- [14] 司小胜, 胡昌华, 周东华. 带测量误差的非线性退化过程建模与剩余寿命估计[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 530-541.  
SI Xiao-sheng, HU Chang-hua, ZHOU Dong-hua. Nonlinear Degradation Process Modeling and Remaining Useful Life Estimation Subject to Measurement Error[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 530-541.
- [15] 王浩伟, 滕克难, 李军亮. 随机环境应力冲击下基于多参数相关退化的导弹部件寿命预测[J]. 航空学报, 2016, 37(11): 3404-3412.  
WANG Hao-wei, TENG Ke-nan, LI Jun-liang. Lifetime Prediction for Missile Components Based on Multiple Parameters Correlative Degrading with Random Shocks of Environmental Stresses[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(11): 3404-3412.
- [16] 鄢伟安. 鱼雷贮存可靠性分析方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2014.  
YAN Wei-an. Research on the Method of Storage Reliability for Torpedo[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2014.
- [17] 张建勋, 胡昌华, 周志杰, 等. 多退化变量下基于 Copula 函数的陀螺仪剩余寿命预测方法[J]. 航空学报, 2014, 35(4): 1111-1121.  
ZHANG Jian-xun, HU Chang-hua, ZHOU Zhi-jie, et al. Multiple Degradation Variables Modeling for Remaining Useful Life Estimation of Gyros Based on Copula Function[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(4): 1111-1121.
- [18] LIU Zhen-yu, MA Xiao-bing, YANG Jun, et al. Reliability Modeling for Systems with Multiple Degradation Processes Using Inverse Gaussian Process and Copulas[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 829597.
- [19] 王新刚, 申强, 韩凯忠, 等. 竞争失效下多元退化建模的航空发动机可靠性分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2021, 42(6): 807-813, 820.  
WANG Xin-gang, SHEN Qiang, HAN Kai-zhong, et al. Reliability Analysis of Aero-Engines Based on Multivariate Degradation Modeling under Competitive Failure[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2021, 42(6): 807-813, 820.
- [20] FANG Guan-qi, PAN Rong, HONG Yi-li. Copula-Based Reliability Analysis of Degrading Systems with Dependent Failures[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2020, 193: 106618.
- [21] NELSEN R B. An Introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 1999.
- [22] 张志鹏. 系统多元相关退化过程建模及可靠度评估方法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2016.  
ZHANG Zhi-peng. Multivariate Correlated Degradation Modeling and Reliability Assessment for Engineering Systems[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2016.
- [23] 贺志远, 吕卫民, 胡文林. 基于 Copula 函数的导弹部件非线性退化研究[J]. 弹箭与制导学报, 2020, 40(3): 75-78.  
HE Zhi-yuan, LYU Wei-min, HU Wen-lin. Research on Nonlinear Degeneration of Missile Components Based on Copula Function[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2020, 40(3): 75-78.
- [24] 李瑞, 汪立新, 刘刚, 等. 基于加速退化模型的加速度计非线性特征分析及贮存寿命预测[J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22(1): 125-130.  
LI Rui, WANG Li-xin, LIU Gang, et al. Nonlinear Characteristic Analysis and Storage Life Forecast for Accelerometer Based on Accelerate Degradation Model [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22(1): 125-130.
- [25] 鲍兆伟. 基于 Copula 函数的多参数退化评估方法研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2018.  
BAO Zhao-wei. Research on Multivariate Parameter Degradation Assessment Method Based on Copula Function[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2018.

责任编辑: 刘世忠