

随机振动响应峰值因子的预计理论研究

张玉杰, 黄超广, 段丽慧

(航空工业一飞院强度所, 西安 710089)

摘要: 简要介绍了超越概率理论、超越频次理论、损伤等效理论和功率谱密度 (PSD) 的时域拟合理论等 4 种常见的峰值因子预计理论, 并基于三角级数提出了一种新的预计理论。结合试飞加速度数据样本, 对比分析超越频次理论、PSD 时域拟合理论和三角级数理论的预估精度。研究表明, 上述 4 种常见的预计理论本质上属于统计学理论; PSD 时域拟合理论预计的峰值因子波动较大, 峰值因子与归一化次数满足高斯分布; 三角级数理论的预估精度较高, 但缺乏离散峰个数的合理判据。

关键词: 随机振动; 峰值因子; 预计理论; 概率分布; 三角级数

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2020.09.011

中图分类号: TB115

文献标识码: A

文章编号: 1672-9242(2020)09-0061-05

Theoretical Research for Predicting Crest Factor of Random Vibration Response

ZHANG Yu-jie, HUANG Chao-guang, DUAN Li-hui

(Strength Design and Research Department, AVIC The First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China)

ABSTRACT: The work aims to briefly introduce four common theories for predicting crest factor including exceeding probability theory, exceeding frequency theory, damage equivalent theory and time-domain fitting theory of power spectral density (PSD) and propose a new prediction theory based on trigonometric series. According to the acceleration data sample during flight test, exceeding frequency theory, time-domain fitting theory of PSD and trigonometric series theory were analyzed contrastively in order to evaluate their accuracy. The analysis results showed that the above four common theories belonged to statistics theory. The crest factors predicted by time-domain fitting theory of PSD fluctuated greatly and satisfied Gauss distribution as the number of normalization. The predicting accuracy of trigonometric series theory was better, but lacked reasonable criterion to determine the number of discrete peak values.

KEY WORDS: random vibration; crest factor; prediction theory; probability distribution; trigonometric series

在现代飞机结构设计中, 需要合理地预估振动过程中可能的最大响应或应力, 以便进行动载荷设计或动强度评估^[1-2]。尤其对于具有不确定特性的随机振动过程 (常用功率谱密度 G_{PSD} 和均方根 G_{RMS} 表征)^[3-4], 准确预计最大振动响应, 则显得更为重要。

对于随机振动, 通常采用 G_{RMS} 的放大倍数 (峰值因子) 来预计响应峰值^[5]。传统方法采用 $3G_{\text{RMS}}$ 准

则, 即设定峰值因子为 3。其数学内涵为高斯随机变量在 $(-3G_{\text{RMS}}, 3G_{\text{RMS}})$ 区间外取值的概率 (超越概率) 为 0.27%。由于涉及概率问题, $3G_{\text{RMS}}$ 准则一直饱受争议。Himmelblau、Fackler、Lubrs 等^[6-8]推荐使用 3RMS 准则。麦道公司^[9]采用 $4G_{\text{RMS}}$ 确定最大等效静载。Scharton^[10]设定峰值因子为 5。DiMaggio^[11]和 Ahlin^[12]则提出了不同的峰值因子预计理论。

收稿日期: 2020-07-03; 修订日期: 2020-08-06

Received: 2020-07-03; Revised: 2020-08-06

作者简介: 张玉杰 (1985—), 男, 硕士, 高级工程师, 主要研究方向为飞机振动控制设计。

Biography: ZHANG Yu-jie (1985—), Male, Master, Senior engineer, Research focus: aircraft vibration control design.

目前在飞机设计中,可供参考的一类预计随机振动响应峰值的方法是根据指定的超越频次或超越概率指标。例如,对于连续突风载荷设计,FAA-ADS-53^[13]推荐的超越频次为 2×10^{-5} 次/飞行小时。F-22 抖振强度设计^[14]中给出的超越指标为全寿命周期内超越概率为 10^{-4} 。

下面简要研究目前几种实用的峰值因子预计理论,以便指导随机振动下结构的动强度设计。

1 理论分析

1.1 超越概率理论

假设随机振动过程满足某种分布,常用分布包括高斯分布、瑞利分布和威布尔分布,根据分布的超越概率预计峰值因子。标准瑞利分布下幅值 A 大于 λG_{RMS} 的超越概率表达式为:

$$P(\lambda G_{\text{RMS}} \leq A < \infty) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (1)$$

因此,峰值因子 λ 与超越概率 P 之间的函数关系为:

$$\lambda = \sqrt{-2\ln(P)} \quad (2)$$

表 1 显示了高斯分布和瑞利分布下,不同峰值因子对应的超越概率。可见,超越概率越小,峰值因子越大。相同超越概率下,瑞利分布对应的峰值因子大于高斯分布。

表 1 峰值因子与超越概率
Tab.1 Peak factor and exceeding probability

峰值因子 λ	超越概率 P	
	高斯分布	瑞利分布
1	3.17×10^{-1}	6.07×10^{-1}
2	4.55×10^{-2}	1.35×10^{-1}
3	2.70×10^{-3}	1.11×10^{-2}
4	6.33×10^{-5}	3.35×10^{-4}
5	5.73×10^{-7}	3.73×10^{-6}

1.2 超越频次理论

超越频次是指单位时间(秒)内超越某个幅值的次数,表达式为:

$$f_e = \frac{N}{T} \quad (3)$$

式中: N 为时间段 T 内的超越次数。

结合超越概率的含义,可得超越频次与超越概率的关系:

$$f_e = v_p P \quad (4)$$

式中: v_p 为单位时间内幅值出现的平均次数。由随机振动理论可知, v_p 可表示为振动响应 G_{PSD} 谱矩

的形式^[15]:

$$v_p = \sqrt{\frac{\int_0^\infty f^2 G_{\text{PSD}}(f) df}{\int_0^\infty G_{\text{PSD}}(f) df}} \quad (5)$$

将式(1)所示的瑞利分布超越概率代入式(4),可得:

$$f_e = v_p \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (6)$$

设定时间段 T 内的振动响应峰值的超越次数 $N=1$, 则式(6)变为:

$$\frac{1}{T} = v_p \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (7)$$

因此,峰值因子的表达式为:

$$\lambda = \sqrt{2\ln(Tv_p)} \quad (8)$$

由式(8)可知,对于同一组振动信号样本,峰值因子 λ 随信号作用时间 T 的增长而增大。

1.3 损伤等效理论

文献[16]基于高斯分布和损伤等效原则,给出了峰值因子的表达式:

$$\lambda = \left[0.683 \times (1)^b + 0.271 \times (2)^b + 0.683 \times (3)^b\right]^{1/b} \quad (9)$$

式中: b 为材料疲劳 $S-N$ 曲线的斜率,通常取 4~12。

文献[17]介绍了一种快速近似计算随机疲劳寿命的方法,简称三段法。该方法同样基于高斯分布假设:1倍、2倍、3倍均方根振动应力水平(简称为 1σ 、 2σ 、 3σ) 在总循环次数 N 中的占比分别为 68.3%、27.1%、4.33%。由此给出的峰值因子的表达式为:

$$\lambda = \left[0.683 \times (1)^b + 0.271 \times (2)^b + 0.0433 \times (3)^b\right]^{1/b} \quad (10)$$

比较式(9)和式(10)可知,文献[16]将 3σ 的占比由 4.33%误写为 68.3%,显然是不对的。

表 2 显示了不同 b 值下由式(10)计算得到的峰值因子。可见, λ 随 b 的增大而逐渐增大,但增幅较小, λ 最大值小于 3。从物理含义上讲,式(10)所示的峰值因子是用来衡量整个振动过程的平均损伤,不适合表征振动响应峰值与 RMS 之比。

表 2 不同 b 下的峰值因子
Tab.2 The peak factors under different b

b	4	6	8	10	12
λ	1.709	1.917	2.083	2.214	2.319

1.4 G_{PSD} 时域拟合理论

对振动响应 G_{PSD} 进行数值变换模拟可以得到对应的时域样本。目前常用的 G_{PSD} 时域拟合方法^[18-20]

包括: 三角级数法、白噪声滤波法、二次滤波法、逆傅里叶变换法和蒙特卡洛法。提取时域样本的绝对最大值 $G_{\max}$ 和均方根 G_{RMS} , 由式 (11) 计算峰值因子:

$$\lambda = \frac{G_{\max}}{G_{\text{RMS}}} \quad (11)$$

1.5 三角级数理论

文中基于三角级数提出一种预计峰值因子的方法。理论上任意振动信号均能写成三角级数的形式:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (12)$$

式中: A 为幅值; ω 为圆频率; φ 为相位; n 为总级数。

若认为信号频率较为离散, 耦合效应微弱, 满足工程常用的稀疏模态假设, 则 $y(t)$ 的最大值为各个正弦信号幅值之和:

$$\max\{y(t)\} = \sum_{i=1}^n A_i \quad (13)$$

$y(t)$ 的均方值为各个正弦信号均方值之和。因此, $y(t)$ 的均方根为:

$$\text{RMS}\{y(t)\} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2}} \quad (14)$$

则峰值因子的表达式为:

$$\lambda = \frac{\max\{y(t)\}}{\text{RMS}\{y(t)\}} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2} \sum_{i=1}^n A_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2}} \quad (15)$$

根据均值不等式关系:

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{n}} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2}} \leq \sqrt{n} \quad (16)$$

可知峰值因子的上限为:

$$\lambda \leq \sqrt{2n} \quad (17)$$

保守起见, 可取式 (17) 上限 $\sqrt{2n}$ 预计峰值因子。可见, 峰值因子 λ 只与信号中包含的峰值频率个数 n 有关。特别地, 对应单频简谐信号 ($n=1$), $\lambda=\sqrt{2}$, 即幅值与均方根之比为 $\sqrt{2}$, 符合实际。

2 案例分析

图 1 显示了某型飞机在试飞过程中测得的加速度时间样本, 时间长度为 16 s, 采样频率为 6144 Hz。图 2 显示了不同样本长度对应的 G_{PSD} , 具体采用 MATLAB 中的 Pwelch 函数进行计算。可见, 不同样本长度下的 G_{PSD} 曲线基本吻合, 表明样本属于平稳随机过程。

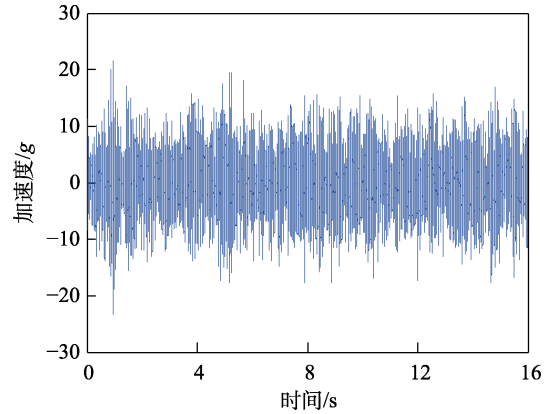


图 1 振动加速度时间样本

Fig.1 Vibration acceleration time sample

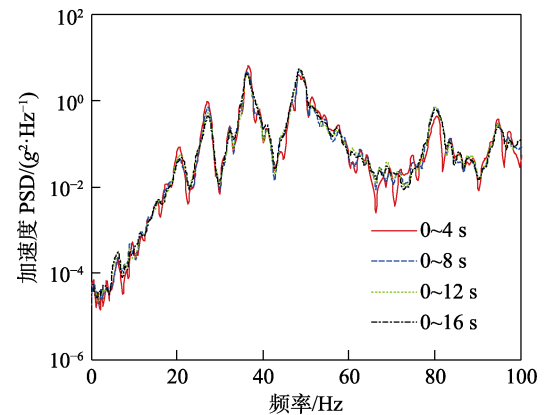


图 2 不同样本长度下的 PSD

Fig.2 The PSD's Under different sample length

以图 2 所示 4 种不同长度样本对应的 G_{PSD} 作为输入, 研究超越频次理论和 PSD 拟合理论预计的峰值因子。这里采用逆傅里叶变换法对 G_{PSD} 进行时域拟合。图 3 显示了样本长度 8 s 对应的原始 G_{PSD} 和时域拟合, 可见, 两者吻合度较高。表 3 对比了峰值因子的真实值 (基于测试时域样本) 以及两种理论的预计值。可见, 基于 G_{PSD} 时域拟合理论预计的峰值因子似乎更接近真实值。需要注意的是, 由于 G_{PSD} 时域拟合计算中假设相位随机, 因此, 每次拟合得到的时域信号不尽相同, 导致峰值因子也存在差异。

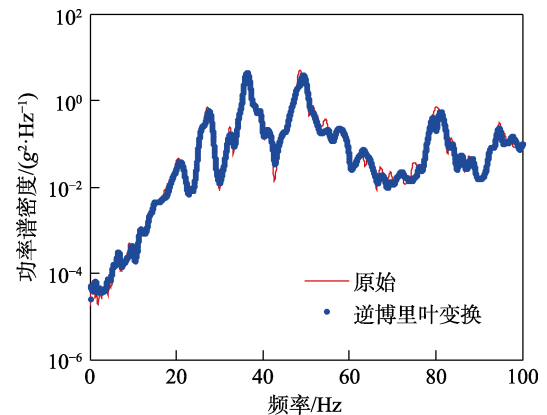


图 3 原始 PSD 与时域拟合后 PSD 的对比

Fig.3 Comparison between original PSD and fitted PSD

表3 峰值因子对比
Tab.3 Comparison of peak factors

时长/s	λ 真实值	超越频次理论			PSD 时域拟合理论		
		T/s	v_p/Hz	λ	G_{max}/g	G_{RMS}/g	λ
4	4.095	4	52.09	3.268	20.80	5.530	3.761
8	4.071	8	53.97	3.484	20.20	5.447	3.708
12	4.100	12	54.48	3.601	20.77	5.500	3.776
16	4.102	16	53.58	3.675	21.32	5.627	3.789

针对图3中8s样本的 G_{PSD} ,分别进行10、100、1000、10000次逆傅里叶变换,记录每次的峰值因子,得到4组峰值因子样本。分析表明,每次拟合得到的时间历程,其均方根值恒定,最大值不同。因此,峰值因子的差异主要由最大值引起。将每组的峰值因子 λ 按从小到大的顺序排列,定义归一化次数 k 为序号 i 与总数 n 的比值($i \leq n, n=10、100、1000、10000$),此时 k 在统计学上称为累积概率,与前文中超越概率 P 之间的满足关系: $k=1-P$ 。

λ 随 k 的变化曲线如图4所示,可见, λ 随着 k 的增加而增加,增幅逐渐增大。当 $k>0.9$ 之后,增幅急剧变大, λ 最小值约为2.9,最大值约为5.3。4组曲线基本重合,并且从变化特征上满足某种指数分布。图5显示了采用高斯分布对数据进行拟合的结果,可见, k 随 λ 的变化曲线满足高斯分布。因此,采用 G_{PSD} 时域拟合理论预计峰值因子本质上仍属于概率问题。

下面采用三角级数理论预计峰值因子。由图2可以看出, G_{PSD} 曲线中包含9个较为明显的离散峰。因此,根据式(17)计算得到 $\lambda=4.243$,与4组样本峰值因子真实值的平均值4.092的相对误差为3.69%,从而验证了所提方法的有效性。该方法的不足在于,缺乏离散峰个数的合理判据。后续将针对该问题展开进一步的研究。

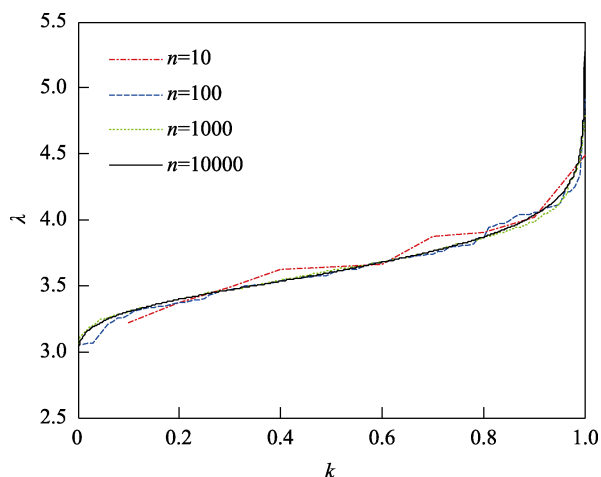


图4 峰值因子随归一化次数的变化曲线

Fig.4 Variation curve of peak factor with normalization times

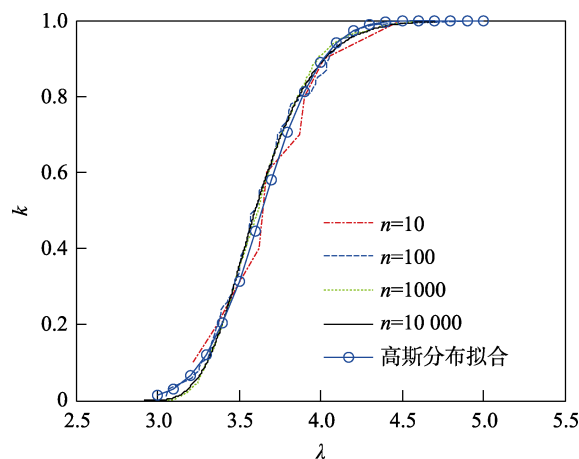


图5 高斯分布拟合结果

Fig.5 Gaussian distribution fitting results

3 结论

简要介绍了4种峰值因子预计理论,并基于三角级数理论提出一种新的预计方法。结合试飞振动数据进行了类比分析,所得结论如下所述。

1) 超越概率理论、超越频次理论、损伤等效理论和PSD时域拟合理论本质上属于统计学理论,峰值因子与概率分布密切相关。

2) 基于 G_{PSD} 时域拟合理论预计的峰值因子波动较大,根源在于拟合得到的时域最大值不同,峰值因子与归一化次数(累积概率)满足高斯分布。

3) 所提三角级数理论能够较好地预计峰值因子,但离散峰个数缺乏合理判据,需要开展后续研究。

参考文献:

- [1] 顾涌芬. 关于新一代飞机的设计载荷[J]. 飞机设计, 2005, 9(3): 1-12.
GU Song-fen. On Design Loads for New-generation Fighter Aircraft[J]. Aircraft Design, 2005, 9(3): 1-12.
- [2] 韩铭. 结构强度可靠性评估的研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
HAN Ming. Research on Reliability Evaluation of Structural Dynamic Strength[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [3] 庄表中, 王行新. 随机振动概论[M]. 北京: 地震出版

- 社, 1982.
- ZHUANG Biao-zhong, WANG Xing-xin. Introduction to Random Vibration[M]. Beijing: Earthquake Press, 1982.
- [4] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- ZHU Wei-qiu. Random Vibration[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [5] 曹守坤. 风压的概率特性与风荷载计算[D]. 长沙: 湖南大学, 2016.
- CAO Shou-kun. Probability Characteristics of Wind Pressure and Calculation of Wind Load[D]. Changsha: Hunan University, 2016.
- [6] NASA-HDBK-7005. Dynamic Environmental Criteria[S].
- [7] FACKLER W. Equivalence Techniques for Vibration Testing SVM-9[R]. Washington D C: The Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, United States Department of Defense, 1972.
- [8] LUHRS H. Random Vibration Effects on Piece Part Applications[R]. Los Angeles, California: Institute of Environmental Sciences, 1982.
- [9] WESTERN D. Vibration, Shock and Acoustics[R]. California: McDonnell Douglas Astronautics Company, 1971.
- [10] SCHARTON T, PANKOW D. Extreme peaks in random vibration testing[R]. Hawthorne, California: Spacecraft and Launch Vehicle Dynamic Environments Workshop, Aerospace/JPL, 2006.
- [11] DIMAGGIO S J, SAKO B H, RUBIN S. Analysis of Nonstationary Vibroacoustic Flight Data Using a Damage-potential Basis[J]. Spacecraft Rockets, 2003, 40(5): 682-689.
- [12] AHLIN K. Comparison of Test Specifications and Measured Field Data[J]. Sound & Vibration, 2006, 40: 82-89.
- [13] HOBIT F M. Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications[M]. Washington D C: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 1988.
- [14] PATEL S R, BLACK C L, ANDERSON W D, et al. F/A-22 Vertical Tail Buffet Strength Certification[C]// 46th AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Austin, Texas: AIAA, 2005.
- [15] WINTERSTEIN S R. Nonlinear Vibration Models for Extremes and Fatigue[J]. Journal of Engineering Mechanics. 1988, 114(10): 1772-1790.
- [16] MARK H M. Certification of the F-22 advanced tactical fighter for high cycle and sonic fatigue[C]// 48th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Honolulu, Hawaii: AIAA, 2007.
- [17] STEINBERG D S. 电子设备振动分析[M]. 第 3 版. 王建刚译. 北京: 航空工业出版社, 2012.
- STEINBERG D S. Vibration Analysis of Electronic Equipment[M]. Third Edition. WANG Jian-gang translate. Beijing: Aviation Industry Press, 2012.
- [18] 刘寅华, 李芾, 黄运华. 轨道不平顺数据模拟方法[J]. 交通运输工程学报, 2006, 6(1): 29-33.
- LIU Yin-hua, LI Fu, HUANG Yun-hua. Numerical Simulation Methods of Railway Track Irregularities[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2006, 6(1): 29-33.
- [19] 魏冲锋. 轨道不平顺功率谱时域转换及其应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2011.
- WEI Chong-feng. Time domain conversion and the application research of track irregularity power spectrum[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2011.
- [20] 王晓燕, 李杰, 董玉才, 等. 基于 FIR 数字滤波器随机振动信号频时域转换方法[J]. 北京理工大学学报, 2012, 32(7): 685-688.
- WANG Xiao-yan, LI Jie, DONG Yu-cai, et al. Transformation from Frequency to Time Domain of Random Vibration Signal Based on FIR Digit Filter[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2012, 32(7): 685-688.